UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Escuela Universitaria de
Ingeniería Técnica Industrial

POLITÉCNICA

SISTEMAS MUESTREADOS

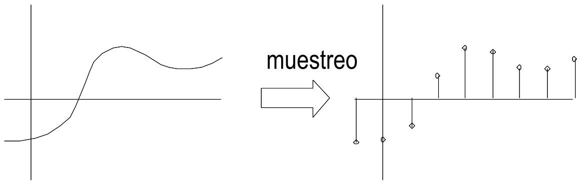
DR. BASIL M. AL HADITHI

SISTEMAS MUESTREADOS

- Muestreo de señales
- Estudio en frecuencia del muestreo
- Teorema del muestreo
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
- Sistemas muestreados
- Técnicas de estudio de sistemas muestreados
- Representación discreta de un sistema continuo.

Muestreo de señales

- Es la operación de toma de muestras de una señal.
- Aplicado a control con computador es la toma de muestras de una señal continua en sucesivos instantes de tiempo

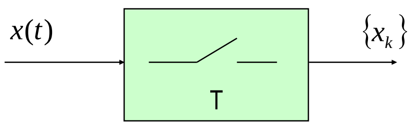


- Se obtiene una secuencia
- Muestreo periódico: cuando las muestras están regularmente espaciadas en un Período de muestreo T
- Frecuencia de muestreo: muestras por unidad de tiempo 1/T

ESCUELA UNIVERSITARIA DE
INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Muestreador

- El elemento que realiza el muestreo recibe el nombre de muestreador



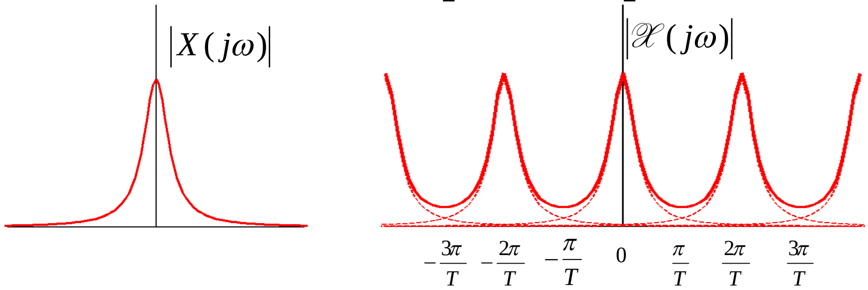
$$x_k = x(kT)$$

- No tiene función de transferencia: varias señales de entrada pueden generar una misma secuencia de salida

Estudio en frecuencia del muestreo

- Se puede demostrar que las transformadas de Fourier de señal continua y secuencia cumplen la siguiente propiedad

$$\mathscr{X}(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left[j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} r\right)\right]$$



Estudio en frecuencia del muestreo

- Teorema de Shannon: Para que a partir de la transformada de la secuencia sea posible determinar con precisión la transformada de la señal original se tienen que verificar
  - Que transformada de la señal continua sea de banda limitada

$$X(j\omega) = 0 \quad \forall \omega \geq \omega_{\max}$$

  - Que el período de muestreo verifique

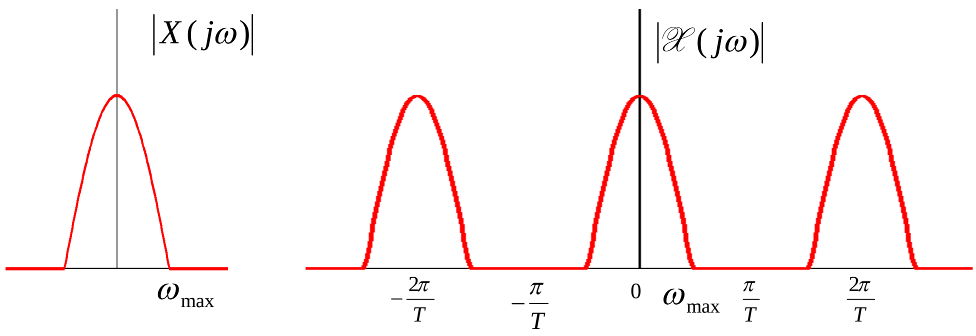
$$\frac{\pi}{T} > \omega_{\max} \Rightarrow T < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$$

  - Llamando frecuencia de muestreo a

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega_T > 2\omega_{\max}$$

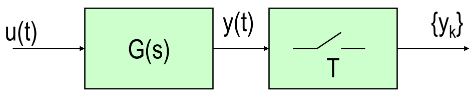
Estudio en frecuencia del muestreo

- Teorema de Shannon



Estudio en frecuencia del muestreo

- En control con computador se muestrea la salida de un sistema continuo



- Los posibles componentes en frecuencia de y(t) serán los de G(jω), que en sistemas lineales se anula únicamente cuando $\omega \to \infty$
- Para cualquier T hay pérdida de información
- Habrá que sugerir valores razonables para T dependiendo del sistema

Criterios para la elección del período de muestreo

- Se suelen tomar teniendo en cuenta la respuesta en cadena cerrada

$$\omega_{\max} \approx (10 \div 20) B$$
$$t_r \approx (10 \div 20) T$$
$$t_s \approx (40 \div 80) T$$

- A partir del polo con mayor ω_d de la función de trasferencia en cadena cerrada

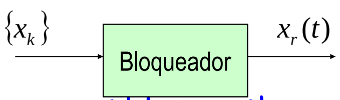
$$\omega_{\max} \approx (30 \div 50) \omega_{d\,\max}$$

- También hay algún criterio a partir de la respuesta en frecuencia en cadena abierta

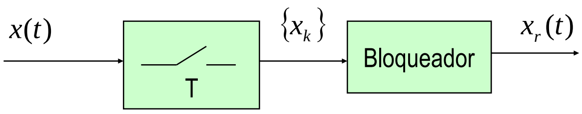
$$\omega_{\max} \approx (20 \div 40) \omega_g$$

Reconstrucción

- Se plantea el problema inverso al del muestreo: a partir de una secuencia obtener una señal continua



- El ideal es que fuera posible muestrear y luego reconstruir sin pérdida de información



Reconstrucción

- La respuesta impulsional del bloqueador será la respuesta ante secuencia impulso unitario

$$\{\delta_k\} \rightarrow b(t)$$

- Se demuestra que existe función de transferencia

$$X_r(j\omega) = B(j\omega)\mathscr{X}(j\omega)$$

- Como la transformada de la secuencia es periódica B(s) debería ser de banda limitada para que la transformada de la señal reconstruida pueda coincidir con la original
- Los sistemas causales no pueden ser de banda limitada, luego no es posible la reconstrucción ideal

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Reconstrucción

- Únicamente se pueden utilizar bloqueadores causales
- Bloqueador de orden cero
  - Es el comúnmente utilizado
  - Mantiene la señal durante el intervalo entre dos muestras

$$x_r(t) = x_k \qquad kT \le t < (k+1)T$$

$$\{\delta_k\} \rightarrow x_r(t) = u_0(t) - u_0(t-T)$$

$$B(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

Reconstrucción

- Bloqueador de orden uno
  - Tiene más interés teórico que práctico
  - Traza una recta con las dos últimas muestras

$$x_r(t) = x_k + \frac{x_k - x_{k-1}}{T}(t - kT) \quad kT \le t < (k+1)T$$

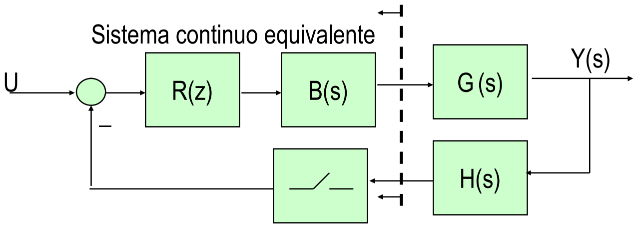
$$B(s) = \frac{1 + sT}{T}\left(\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right)^2$$

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Sistemas muestreados

- Sistemas que sufren el proceso de muestreo
- Son unión de sistemas continuos y discretos
- No hay una técnica unificada para este tipo de sistemas
- Hay que utilizar técnicas propias de los continuo o de los discretos

Sistemas muestreados

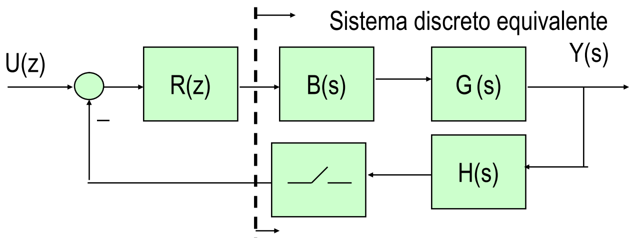


Estudio como sistema continuo

- Se pretende estudiar el sistema muestreado como con técnicas propias de sistemas continuos
- Se diseña un regulador continuo para luego calcular uno discreto equivalente al continuo
- La equivalencia no es exacta, ya que el muestreador no tiene función de transferencia

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Sistemas muestreados



- Estudio como sistema discreto
  - Se pretende estudiar el sistema muestreado como con técnicas propias de sistemas discretos
  - Se calcula el equivalente discreto del conjunto bloqueador-sistema-muestreador para luego calcular un regulador discreto de forma directa
  - La equivalencia es exacta

Sistemas muestreados

- La transformada en z de un sistema discreto equivalente a uno continuo con función de transferencia racional también es racional

$$F(s) = B(s)G(s)H(s)$$

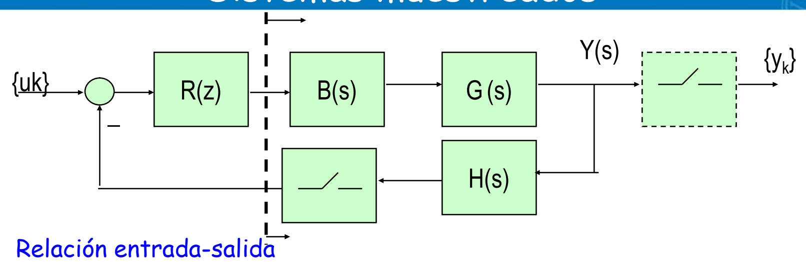
$$G(z) = Z\left[F(s)\right] = \sum_{\text{polos de } F(s)} \text{residuos}\left[F(s)\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}\right]$$

- Ejemplo

$$F(s) = \frac{b}{s+a}$$

$$G(z) = Z\left[F(s)\right] = \sum_{s=-a} \text{residuos}\left[\frac{b}{s+a}\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}\right] = \frac{b}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

Sistemas muestreados



- Relación entrada-salida
  - No existe función de trasferencia entre $\{u_k\}$ e y(t), por lo que es necesario suponer un muestreador virtual del que se obtenga $\{y_k\}$

$$Y(z) = \frac{R(z)Z\left[B(s)G(s)\right]}{1+R(z)Z\left[B(s)G(s)H(s)\right]}U(z)$$

  - Observación: en general

$$Z\left[B(s)G(s)\right] \neq Z\left[B(s)\right]Z\left[G(s)\right]$$